



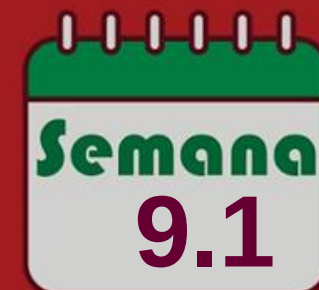
ce
pre
UNI

CICLO
PREUNIVERSITARIO

2024-1

Álgebra

TEMA OPERACIONES CON FUNCIONES



CONTENIDOS

- **Operaciones con funciones reales:**
Adición, sustracción, multiplicación, división.
- **Composición:**
la composición y los tipos de funciones.

OPERACIONES CON FUNCIONES

Dadas dos funciones f y g reales de variable real, con dominios no vacíos, y de intersección no vacía. Se cumple:

$$1. (f + g)(x) = f(x) + g(x) \rightarrow \text{Dom}(f + g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$$

$$2. (f - g)(x) = f(x) - g(x) \rightarrow \text{Dom}(f - g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$$

$$3. (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \rightarrow \text{Dom}(f \cdot g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$$

$$4. \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \text{Dom}(f/g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) - \{x/g(x) = 0\}$$

$$5. f^n(x) = (f(x))^n \rightarrow \text{Dom}(f^n) = \text{Dom}(f), n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

Ejercicio:

Dada las funciones:

$$f(x) = \sqrt{x-3} \quad ; \quad g(x) = \frac{x-4}{x-5}$$

Hallar la regla de correspondencia de: $(f - g)(x)$

Resolución.

$$Dom(f) = [3; +\infty)$$

$$Dom(g) = \mathbb{R} - \{5\}$$

$$Dom(f - g) = Dom(f) \cap Dom(g) = [3; 5) \cup \langle 5; +\infty)$$

La regla de correspondencia es:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x-3} - \frac{x-4}{x-5} \quad \textbf{RPTA.}$$

Ejercicio

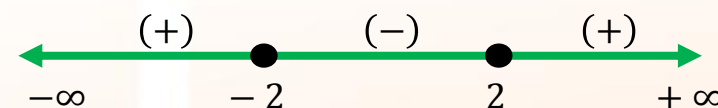
Dada las funciones: $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

Determine el rango de $f \cdot g$

Resolución

$$Dom(f): x^2 - 4 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x + 2)(x - 2) \geq 0$$



$$Dom(f) = \langle -\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

$$Dom(g): x - 2 > 0 \rightarrow x > 2 \rightarrow Dom(g) = \langle 2, +\infty)$$

$$Dom(f \cdot g) = Dom(f) \cap Dom(g)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x^2 - 4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x - 2}}, \quad x \in \langle 2, +\infty)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x - 2}} = \sqrt{\frac{(x + 2)(\cancel{x - 2})}{(\cancel{x - 2})}}, \quad x \in \langle 2, +\infty)$$

$$(f \cdot g)(x) = \sqrt{x+2}, \quad x \in \langle 2, +\infty \rangle$$

$$\text{Como } x > 2 \rightarrow 2 < x < +\infty$$

$$4 < x+2 < +\infty$$

$$\sqrt{4} < \sqrt{x+2} < +\infty$$

$$2 < (f \cdot g)(x) < +\infty$$

$$\text{Ran}(f \cdot g) = \langle 2; +\infty \rangle \quad \text{RPTA.}$$

Función por tramos

Ejemplo

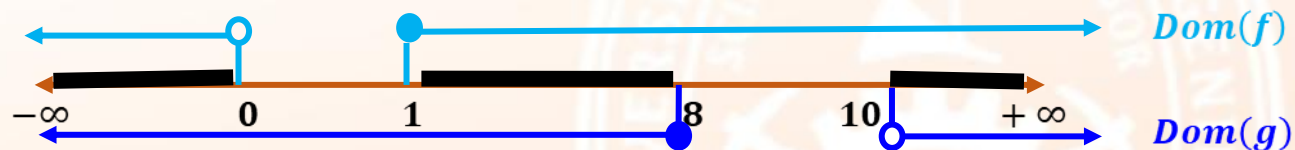
Determine $(f \cdot g)(x)$ donde:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \geq 1 \\ x^2 - 2, & x < 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 3x + 1, & x \leq 8 \\ 2x^3, & x > 10 \end{cases}$$

Resolución

$$Dom(f) = \langle -\infty; 0 \rangle \cup [1; +\infty),$$

$$Dom(g) = \langle -\infty; 8] \cup \langle 10; +\infty \rangle$$



$$Dom(f) \cap Dom(g) = \langle -\infty; 0 \rangle \cup [1; 8] \cup \langle 10; +\infty \rangle$$

Si $x < 0$:

$$(f \cdot g)(x) = (x^2 - 2) \cdot (3x + 1) = 3x^3 + x^2 - 6x - 2$$

Si $1 \leq x \leq 8$:

$$(f \cdot g)(x) = (2x + 1) \cdot (3x + 1) = 6x^2 + 5x + 1$$

Si $x > 10$

$$(f \cdot g)(x) = (2x + 1) \cdot 2x^3 = 4x^4 + 2x^3$$

Luego el producto:

$$(f \cdot g)(x) = \begin{cases} 3x^3 + x^2 - 6x - 2, & \text{si } x < 0 \\ 6x^2 + 5x + 1, & \text{si } 1 \leq x \leq 8 \\ 4x^4 + 2x^3, & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

RPTA.

Ejercicio

Dada las funciones:

$$f(x) = \sqrt{x+3}, \quad x \in [-3, 3]$$

$$g = \{(-3, 0), (1, 4), (-2, 5), (0, -2), (4, 3)\}$$

Determine el máximo elemento del rango de: f/g

Resolución

$$\text{Dom}(f/g) = (\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)) \setminus \{x/g(x) = 0\}$$

$$\text{Dom}(f/g) = ([-3, 3] \cap \{-3, 1, -2, 0, 4\}) \setminus \{-3\}$$

$$\text{Dom}(f/g) = \{-3, 1, -2, 0\} \setminus \{-3\} = \{-2, 0, 1\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(-2) = \frac{f(-2)}{g(-2)} = \frac{1}{5} \rightarrow (-2, 1/5)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \left(0, -\sqrt{3}/2\right)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(1) = \frac{f(1)}{g(1)} = \frac{1}{2} \rightarrow (1, 1/2)$$

$$\text{Ran}(f/g) = \left\{ \frac{1}{5}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right\}$$



mayor elemento **RPTA.**

Ejercicio

Dadas las funciones f y g , $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \llbracket x - 1 \rrbracket$

Determine: $Dom \frac{f}{g}$

Resolución

$$\begin{aligned} Dom(f/g) &= (Dom(f) \cap Dom(g)) - \{x / g(x) = 0\} \\ &= ([0, +\infty) \cap \mathbb{R}) - \{x / \llbracket x - 1 \rrbracket = 0\} \\ &= [0, +\infty) - \{x / \llbracket x \rrbracket = 1\} \\ &= [0, +\infty) - \{x / 1 \leq x < 2\} \end{aligned}$$

$$Dom(f/g) = [0; 1) \cup [2; +\infty)$$

$$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x}}{\llbracket x-1 \rrbracket}, \quad x \in [0; 1) \cup [2; +\infty) \quad \text{Rpta.}$$

Ejercicio

Indique el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

- I) Si $f \circ g$ es inyectiva entonces f es inyectiva.
- II) Si f y g son inyectivas entonces $f+g$ es inyectivas
- III) El rango de $f(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$ es $\{-1; 0\}$

Resolución

I) Por Ejemplo:

$$f(x) = 5 \quad \wedge \quad g(x) = x - 1 \quad \rightarrow \quad (fg)(x) = 5(x - 1)$$

$(fg)(x)$ es l_1

(Falso)

II) Por Ejemplo:

$$f(x) = x + 3 \quad \wedge \quad g(x) = -x \quad \text{Son Inyectivas}$$

$$\text{Pero; } (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f + g)(x) = x + 3 - x = 3 \quad \text{No es Inyectiva (Falso)}$$

III) Redefiniendo la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0; & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -1; & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \rightarrow \text{Ran} f = \{-1; 0\} \quad \text{(Verdadero)}$$

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Dadas dos funciones f y g (no necesariamente reales de variable real), con Dominios no vacíos.

Se define a la "función compuesta de f y g " o

"Composición de f y g " o

" f compuesta con g ";

denotada $f \circ g$.

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Dadas las funciones f y g , se define una nueva función llamada la composición de f con g (simbolizada por $f \circ g$) de la siguiente forma:

Dominio

$$\text{Dom } f \circ g = \{x \in \text{Dom } g / g(x) \in \text{Dom } f\}$$

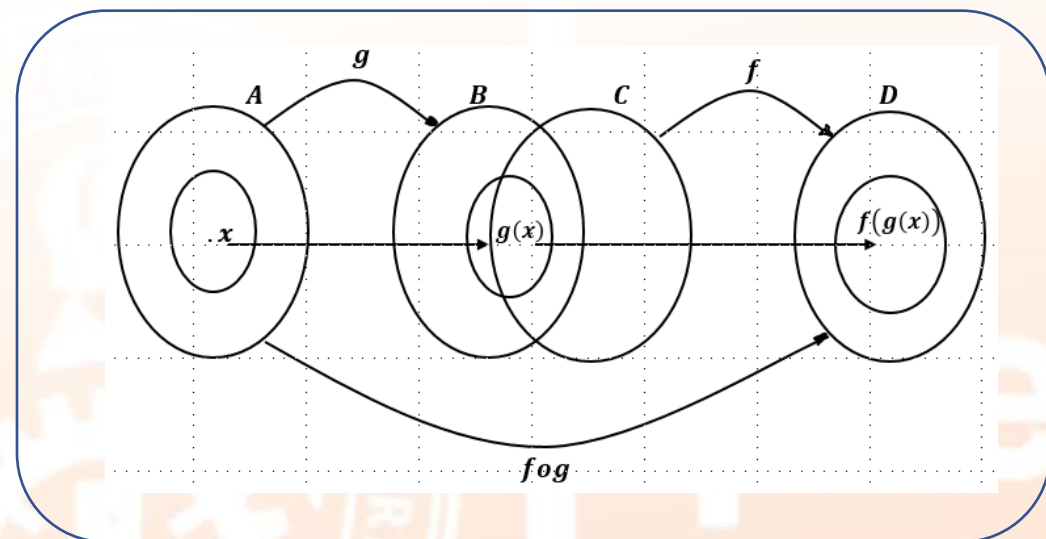
$$\text{Dom } f \circ g = \text{Dom } g \cap \{x / g(x) \in \text{Dom } f\}$$

Regla de correspondencia

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Observación:

Si $\text{Rang } g \cap \text{Dom } f \neq \emptyset$, entonces $f \circ g$ existe



COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Propiedades de las funciones compuestas

1. La composición de funciones es **asociativa**

$$fo(gh) = (fog)oh$$

2. La composición de funciones **no es conmutativa**

$$fog \neq gof$$

3. El elemento neutro en las funciones compuestas es la **función identidad I.**

$$foI = Iof = f$$

Ejemplo

Sean las funciones:

$$f = \{(1,2), (2,3), (3,5), (4,7)\}$$

$$g = \{(0,3), (1,2), (2,1), (3,4)\}$$

Determine la suma de los elementos del rango de la función h tal que:

$$h = fog + gof$$

Resolución

$$fog = \{(0,5), (1,3), (2,2), (3,7)\}$$

$$gof = \{(1,1), (2,4)\}$$

$$h = fog + gof = \{(1,4), (2,6)\}$$

$$Ran(h) = \{4,6\} \rightarrow \text{Suma de los elementos del rango} = 10. \text{ **RPTA.**}$$

Ejercicio

Indique el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

- I) Sea f creciente y g decreciente en R entonces $f \circ g$ es creciente.
- II) Sea $f, g : R \rightarrow R$, f es impar y g es par entonces $f \circ g + 2f$ es impar.
- III) Si $f \circ g$ es inyectiva entonces g es inyectiva.

Resolución

I) Si f es creciente y g es decreciente

$$\rightarrow x_1 < x_2: f(x_1) < f(x_2) \quad \wedge \quad g(x_1) > g(x_2)$$

$$x_1 < x_2 \quad \rightarrow \quad g(x_1) > g(x_2)$$

$$\rightarrow f(g(x_1)) > f(g(x_2))$$

$$\rightarrow (f \circ g)_{(x_1)} > (f \circ g)_{(x_2)}$$

$$x_1 < x_2 \quad \rightarrow \quad (f \circ g)_{(x_1)} > (f \circ g)_{(x_2)}$$

$\therefore$ **$f \circ g$ es Decreciente (Falso)**

II) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \text{ es impar} \rightarrow f(-x) = -f(x)$$

$$g \text{ es par} \rightarrow g(-x) = g(x)$$

$$\text{como } \text{Dom}f = \text{Dom}g = \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}: -x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Dom}(fg + 2f) = \text{Dom}f \cap \text{Dom}g = \mathbb{R}$$

$$(fg + 2f)(-x) = (fg)(-x) + 2f(-x)$$

$$= f(-x) \cdot g(-x) + 2f(-x)$$

$$= -f(x) \cdot g(x) - 2f(x)$$

$$= -(f(x) \cdot g(x) + 2f(x)) = -(fg + 2f)(x)$$

$$(fg + 2f)(-x) = -(fg + 2f)(x) \quad \text{es impar (Verdadero)}$$

III) Si $f \circ g$ es inyectiva por reducción al absurdo..

Supongamos que g no es inyectiva

$$\rightarrow \exists x_1, x_2 \in \text{Dom}(g) \text{ con } x_1 \neq x_2 / g(x_1) = g(x_2)$$

$$\text{Como } f \text{ es función } f(g(x_1)) = f(g(x_2))$$

$$\rightarrow f \circ g(x_1) = f \circ g(x_2)$$

$f \circ g$ no es inyectiva (esto contradice la hipótesis)

$\rightarrow$ **g si es inyectiva (Verdadero)**